Chapitre 23 - Correction des exercices

Exercice 1:

1. On développe par rapport à la première colonne : $D_1 = 1(0+1) - 1(1-0) = 0$.
2. La première et la troisième colonne sont liées donc $D_2 = 0$.
3. Le complexe j est une racine troisième de l'unité donc $1 + j + j^2 = 0$. On ajoute à la première colonnes les deux autres colonnes ce qui ne modifie pas la valeur du déterminant
$$D_3 = \begin{vmatrix} 1+j^2+j & j^2 & j \\ j+1+j^2 & 1 & j^2 \\ j^2+j+1 & j & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & j^2 & j \\ 0 & 1 & j^2 \\ 0 & j & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Exercice 2:

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda+2 & -1 & -2 \\ 2 & \lambda-1 & -2 \\ 1 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} \underset{C_1 \to C_1+C_2+C_3}{=} \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & -2 \\ \lambda-1 & \lambda-1 & -2 \\ \lambda-1 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & \lambda-1 & -2 \\ 1 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} \\ &\underset{L_i \leftarrow L_i - L_1}{=} (\lambda-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-1)(\lambda+1) \end{aligned}$$
2. Les zéros de f sont $-1, 0$ et 1.

Exercice 3: Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$.
M est inversible $\iff ad - bc \neq 0$.

Dans ce cas, avec la matrice augmentée, on trouve $M^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Exercice 4: Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$.

1.
$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} &= abc\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \underset{C_i \leftarrow C_i - C_1}{=} abc\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} \\ &= abc(b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ a^2 & b+a & c+a \end{vmatrix} = abc(b-a)(c-a)(c-b) \end{aligned}$$
2. On appelle $A = \begin{pmatrix} a \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} c \\ c^2 \\ c^3 \end{pmatrix}$ les colonnes qui apparaissent dans le déterminant.

   (a)
$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} B+C & C+A & A+B \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} B & C+A & A+B \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} C & C+A & A+B \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} B & C & A+B \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B & A & A+B \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} C & C & A+B \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} C & A & A+B \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} B & C & A+B \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} C & A & A+B \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} B & C & A \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B & C & B \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} C & A & A \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} C & A & B \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} B & C & A \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} C & A & B \end{vmatrix} \end{aligned}$$

(b) De plus, par deux permutations de colonnes,

$$\begin{vmatrix} B+C & C+A & A+B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B & C & A \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} C & A & B \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} A & B & C \end{vmatrix} = 2abc(b-a)(c-a)(c-b)$$

Exercice 5:

1. Soit $m \in \mathbb{R}$. Les points sont alignés ssi les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont proportionnels donc

$$\text{A, B et C sont alignés} \iff \begin{vmatrix} 0 & m-1 \\ m & 3-m \end{vmatrix} = 0 \iff m(m-1) = 0 \iff m = 0 \text{ ou } m = 1.$$

2. Soit M un point de l'espace de coordonnées (x, y, z).

$$\begin{aligned} M \in \mathscr{P} &\iff \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AM}\right) \text{ est une famille liée.} \\ &\iff \begin{vmatrix} 1 & -2 & x-1 \\ 2 & 3 & y-1 \\ 2 & 1 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \\ &\iff \begin{vmatrix} 1 & -2 & x-1 \\ 0 & 7 & y-2x+1 \\ 0 & 5 & z-2x+1 \end{vmatrix} = 0 \\ &\iff 7(z-2x+1) - 5(y-2x+1) = 0 \\ &\iff -4x - 5y + 7z + 2 = 0 \end{aligned}$$

3. Soit $\theta \in [0, \pi]$. L'aire du triangle ABC vaut $\frac{1}{2}\left|\det_{\mathscr{B}_c}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})\right|$ où $\mathscr{B}_c$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Ce résultat découle du fait que $\det_{\mathscr{B}_c}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est l'aire relative du parallélogramme engendré par $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Or

$$\begin{aligned} \det{}_{\mathscr{B}_c}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) &= \begin{vmatrix} \cos(\theta) - 1 & \cos(2\theta) - 1 \\ \sin(\theta) & \sin(2\theta) \end{vmatrix} \\ &= \cos(\theta)\sin(2\theta) - \sin(\theta)\cos(2\theta) - \sin(2\theta) + \sin(\theta) \\ &= 2\sin(\theta) - \sin(2\theta) \end{aligned}$$

Étudions la fonction $f : \theta \mapsto 2\sin(\theta) - \sin(2\theta)$ sur $[0, \pi]$.
Cette dernière est dérivable et pour tout $\theta \in [0, \pi]$, $f'(\theta) = 2\left(\cos(\theta) - \cos(2\theta)\right) = 2\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

Recherche des points critiques de f :
Soit $\theta \in [0, \pi]$, $f'(\theta) = 0 \iff \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = 0$ ou $\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) = 0 \iff \theta \in \{0; \frac{2\pi}{3}; \pi\}$.

On peut à présent dresser le tableau de variation de f :

θ	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$f'(\theta)$	0	$+$	0	$-$	0
$f(\theta)$	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	0

Par conséquent, l'aire du triangle ABC est maximale uniquement lorsque $\theta = \frac{2\pi}{3}$ et vaut $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Exercice 6: On va faire apparaitre des lignes ou des colonnes de 0 en utilisant les 3 opérations élémentaires.

1.

$$D_1 = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} \underset{L_i \leftarrow L_i - L_4}{=} \begin{vmatrix} 0 & a-b & a-c & a-d \\ 0 & 0 & b-c & b-d \\ 0 & 0 & 0 & c-d \\ a & b & c & d \end{vmatrix} \underset{L_1 \leftrightarrow L_2 \leftrightarrow L_3 \leftrightarrow L_4}{=} (-1)^3 \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a-b & a-c & a-d \\ 0 & 0 & b-c & b-d \\ 0 & 0 & 0 & c-d \end{vmatrix}$$
$$= -a(a-b)(b-c)(c-d)$$

2.

$$\begin{aligned} D_2 = \begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix} & \underset{C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 + C_4}{=} \begin{vmatrix} a+2c+b & c & c & b \\ a+2c+b & a & b & c \\ a+2c+b & b & a & c \\ a+2c+b & c & c & a \end{vmatrix} \\ & \underset{L_i \leftarrow L_i - L_4}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & b-a \\ 0 & a-c & b-c & c-a \\ 0 & b-c & a-c & c-a \\ a+2c+b & c & c & a \end{vmatrix} \\ & = -(a+b+2c) \begin{vmatrix} 0 & 0 & b-a \\ a-c & b-c & c-a \\ b-c & a-c & c-a \end{vmatrix} \\ & = -(a+b+2c)(b-a)((a-c)^2 - (b-c)^2) \\ & = (a+b+2c)(a+b-2c)(a-b)^2 \end{aligned}$$

Exercice 7: L'inversibilité d'une matrice est caractérisée par un déterminant non nul. Soit $m \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & m & -1 & m \\ -1 & 1 & -m & -m \\ m & 1 & 1 & m \\ m & -1 & 1 & -m \end{vmatrix} & = m \begin{vmatrix} 1 & m & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -m & -1 \\ m & 1 & 1 & 1 \\ m & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \underset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{=} m \begin{vmatrix} 0 & m+1 & -1-m & 0 \\ -1 & 1 & -m & -1 \\ m & 1 & 1 & 1 \\ m & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\ & \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_4}{=} m \begin{vmatrix} 0 & m+1 & -1-m & 0 \\ -1 & 1 & -m & -1 \\ 2m & 0 & 2 & 0 \\ m & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2m(m+1) \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -m & -1 \\ m & 0 & 1 & 0 \\ m & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\ & \underset{C_3 \leftarrow C_2 + C_3}{=} 2m(m+1) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1-m & -1 \\ m & 0 & 1 & 0 \\ m & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2m(m+1) \begin{vmatrix} -1 & 1-m & -1 \\ m & 1 & 0 \\ m & 0 & -1 \end{vmatrix} \\ & \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_3}{=} -2m(m+1) \begin{vmatrix} -1-m & 1-m & 0 \\ m & 1 & 0 \\ m & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2m(m+1)(-1-m-m(1-m)) \\ \begin{vmatrix} 1 & m & -1 & m \\ -1 & 1 & -m & -m \\ m & 1 & 1 & m \\ m & -1 & 1 & -m \end{vmatrix} & = 2m(m+1)(m^2 - 2m - 1) \end{aligned}$$

La matrice est inversible si, et seulement si, $m \in \mathbb{R} \backslash \{0; -1; 1+\sqrt{2}; 1-\sqrt{2}\}$.

Exercice 8: Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}_{[n]}$$

1.
$$D_{n+2} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}_{[n+2]} \underset{\text{dev.}C_1}{=} 2 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}_{[n+1]} - (-1) \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}_{[n+1]}$$
$$\underset{\text{dev.}L_1}{=} 2D_{n+1} - \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}_{[n]}$$
$$= 2D_{n+1} - D_n$$

2. (D_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $(r-1)^2 = 0$.
   Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $D_n = (\lambda n + \mu)1^n = \lambda n + \mu$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
   Or $D_1 = 2$ et $D_2 = 3$, d'où $\lambda = \mu = 1$. On a donc $D_n = n+1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Pour $n = 3$, on trouve bien $D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4$.

Exercice 9: Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. M est une matrice antisymétrique donc $M^T = -M$.
$$M^T = -M \Leftrightarrow \det(M^T) = \det(-M) \Leftrightarrow \det(M) = (-1)^n \det(M)$$
   Si n est impair, on a donc $\det(M) = 0$.

2.
$$B^2 = -I_n \Leftrightarrow \det(B^2) = \det(-I_n) \Leftrightarrow (\det(B))^2 = (-1)^n$$
   Le membre de gauche est un nombre positif donc on doit avoir n pair. Alors $\det(B) = 1$ ou $\det(B) = -1$.

Exercice 10: Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. On va inverser les lignes deux par deux ($L_1 \leftrightarrow L_n,\ L_2 \leftrightarrow L_{n-1}, ...$) pour se ramener à une matrice diagonale.
   Si n est pair, on fait $\dfrac{n}{2}$ échanges. On a donc le déterminant qui vaut $(-1)^{\frac{n}{2}} \prod_{k=1}^{n} \lambda_i$.
   Si n est impair, on fait $\dfrac{n-1}{2}$ échanges. On a donc le déterminant qui vaut $(-1)^{\frac{n-1}{2}} \prod_{k=1}^{n} \lambda_i$.

2. On a donc $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ \vdots & \dots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & \dots & n-1 & n-1 \\ 1 & 2 & \dots & n-1 & n \end{vmatrix} \underset{i\geqslant 2,\ L_i \leftarrow L_i - L_n}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 2-n \\ \vdots & \dots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 1 & 2 & \dots & n-1 & n \end{vmatrix}$

$\underset{L_i \leftrightarrow L_j}{=} (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 2-n \\ \vdots & \dots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{vmatrix} \underset{C_1 \leftarrow C_1 - C_2}{=} (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} -1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 2-n \\ \vdots & \dots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{vmatrix}$

$= (-1)^{2(n-1)} = 1$

3.

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a & 0 & \dots & \dots & 0 & b \\ 0 & \ddots & & & \iddots & 0 \\ \vdots & 0 & a & b & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & b & a & 0 & \vdots \\ 0 & \iddots & & & \ddots & 0 \\ b & 0 & \dots & \dots & 0 & a \end{vmatrix}_{[2n]} &\underset{i\leqslant n,\ C_i \leftarrow C_i + C_{2n+1-i}}{=} \begin{vmatrix} a+b & 0 & \dots & \dots & 0 & b \\ 0 & \ddots & & & \iddots & 0 \\ \vdots & 0 & a+b & b & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & b+a & a & 0 & \vdots \\ 0 & \iddots & & & \ddots & 0 \\ b+a & 0 & \dots & \dots & 0 & a \end{vmatrix}_{[2n]} \\
&= (a+b)^n \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & b \\ 0 & \ddots & & & \iddots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & b & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & a & 0 & \vdots \\ 0 & \iddots & & & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & a \end{vmatrix}_{[2n]} \\
&\underset{i\leqslant n,\ L_i \leftarrow L_i - L_{2n+1-i}}{=} (a+b)^n \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & b-a \\ 0 & \ddots & & & \iddots & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & b-a & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & a & 0 & \vdots \\ 0 & \iddots & & & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & a \end{vmatrix}_{[2n]} \\
&= (a+b)^n (b-a)^n \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \ddots & & & \iddots & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & a & 0 & \vdots \\ 0 & \iddots & & & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & a \end{vmatrix}_{[2n]}
\end{aligned}$$

$$\underset{i\leqslant n,\ L_i\leftrightarrow L_i-L_{2n+1-i}}{=} ((a+b)(b-a))^n \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & a \\ 0 & \ddots & & & \iddots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & a & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots \\ 0 & \iddots & & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}_{[2n]}$$

$$= (a^2-b^2)^n$$

4. $$\begin{vmatrix} 1 & n & n-1 & ... & 2 \\ 2 & 1 & \ddots & ... & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n-1 & & \ddots & 1 & n \\ n & n-1 & ... & 2 & 1 \end{vmatrix} \underset{C_1\to C_1+...+C_n}{=} \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & n & n-1 & ... & 2 \\ 1 & 1 & \ddots & ... & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & & \ddots & 1 & n \\ 1 & n-1 & ... & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\underset{L_i\to L_i-L_{i-1}}{=} \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & n & n-1 & ... & 2 \\ 0 & 1-n & 1 & ... & 1 \\ \vdots & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & \ddots & 1-n & 1 \\ 0 & 1 & ... & 1 & 1-n \end{vmatrix} = \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1-n & 1 & ... & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & ... & 1 & 1-n \end{vmatrix}$$

$$\underset{L_i\leftrightarrow L_i-L_{n-1}}{=} \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} -n & 0 & ... & n \\ 0 & -n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & n \\ 1 & ... & 1 & 1-n \end{vmatrix} \underset{C_{n-1}\to C_1+...+C_{n-1}}{=} \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} -n & 0 & ... & 0 \\ 0 & -n & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & ... & 1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{n(n+1)}{2}(-1)(-n)^{n-2}$$

Exercice 11: Notons $\mathscr{B}_c$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

1. $$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_c}(f) = \begin{pmatrix} 1 & * & ... & ... & * \\ 0 & 1 & * & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & * \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} \text{ donc } \det(f) = 1$$

2. $$g(1) = 1 \text{ et } \forall k \geqslant 1,\ g(X^k) = X.kX^{k-1} + 1 = kX^k + 1$$

   donc

   $$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_c}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & ... & ... & 1 \\ 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 2 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & & & n \end{pmatrix} \text{ donc } \det(g) = n!$$

3. $$h(1) = 0 \text{ et } \forall k \geqslant 1,\ h(X^k) = (X+1)^k - X^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} X^i - X^k = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} X^i$$

donc la matrice de h dans $\mathscr{B}_c$ est triangulaire supérieure avec des 0 sur la diagonale.

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_c}(h) = \begin{pmatrix} 0 & * & \dots & \dots & * \\ 0 & 0 & * & & \\ 0 & 0 & 0 & & \\ \vdots & & & \ddots & * \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix} \text{ donc } \det(h) = 0$$

Exercice 12:

1. Soient F et G des sous-espaces supplémentaires de dimensions p et q d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. On note p la projection sur F parallèlement à G et s la symétrie par rapport à F parallèlement à G. Soit $\mathscr{B}$ une base de E adaptée à la décomposition $F \oplus G$,

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p) = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(s) = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & -I_{n-r} \end{pmatrix} \text{ où } r = \dim(F).$$

   Donc $\mathrm{tr}(p) = \dim(F)$, $\det(p) = 0$, $\mathrm{tr}(s) = \dim(F) - \dim(G)$, $\det(s) = (-1)^{\dim(G)}$.

2. Notons φ l'endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ défini par $\varphi : A \mapsto A^T$. φ est une symétrie (car $\varphi^2 = \mathrm{id}$) par rapport à $F = \mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{id}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ parallèlement à $G = \mathrm{Ker}(\varphi + \mathrm{id}) = \mathscr{A}_n(\mathbb{K})$.
   Donc $\mathrm{tr}(\varphi) = \dim(F) - \dim(G) = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = n$ et $\det(\varphi) = (-1)^{\dim(G)} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

Exercice 13: Notons $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. On a

$$\det_{\mathscr{B}}(P_0, P_1, P_2, P_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -3.$$

Exercice 14: Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $f : P \mapsto X^2P'' + XP' + P$.
Notons $\mathscr{B}_c$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $f(X^k) = (k(k-1) + k + 1)X^k = (k^2 + 1)X^k$

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_c}(f) = \mathrm{diag}(1, 2, \dots, n^2 + 1) \text{ donc } \det(f) = \prod_{k=0}^{n}(k^2 + 1)$$

On a $\det(f) \neq 0$ donc f est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. D'où $(X + 1)^n$ admet un unique antécédent par f i.e. $\exists!\, P \in \mathbb{R}_n[X],\ X^2P'' + XP' + P = (X + 1)^n$.

Exercice 15:

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. $\chi_A(\lambda) = 0 \Longleftrightarrow A - \lambda I_n$ est inversible $\Longleftrightarrow \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) \neq \{0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$.

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\chi_A(\lambda) = 0$, alors il existe $X \in \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)\backslash\{0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$ tel que $(A - \lambda I_n)X = 0$ i.e. $AX = \lambda X$.

3. Dans cette question, on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\chi_A(\lambda) = -\lambda(1 - \lambda) - 2 = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda + 1)(\lambda - 2)$.
   Les zéros de χ_A sont donc -1 et 2.

(b) On détermine $\mathrm{Ker}(A+I_2)$ et $\mathrm{Ker}(A-2I_2)$.
$\mathrm{Ker}(A+I_2) = \mathrm{Ker}\left(\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix}\right)$.
$\mathrm{Ker}(A-2I_2) = \mathrm{Ker}\left(\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\right)$.
Posons $X_1 = \begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$.

(c) Notons $f : X \mapsto AX$. $\mathscr{B} = \left(\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\right)$ la base canonique de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.
On a $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = A$.
La famille $\mathscr{B}' = \left(\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.
On a $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$.
Or $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}$, par conséquent $A = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\left(P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}\right)^{-1}$.
Donc A est semblable à $D = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$.

(d) Soit $m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
A^m = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} D^m \left(P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}\right)^{-1} &= \begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(-1)^m & 0\\ 0 & 2^m\end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2(-1)^m & 2^m\\ (-1)^{m+1} & 2^m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2(-1)^m + 2^m & 2(-1)^{m+1} + 2^{m+1}\\ (-1)^{m+1} + 2^m & (-1)^m + 2^{m+1}\end{pmatrix}
\end{aligned}$$